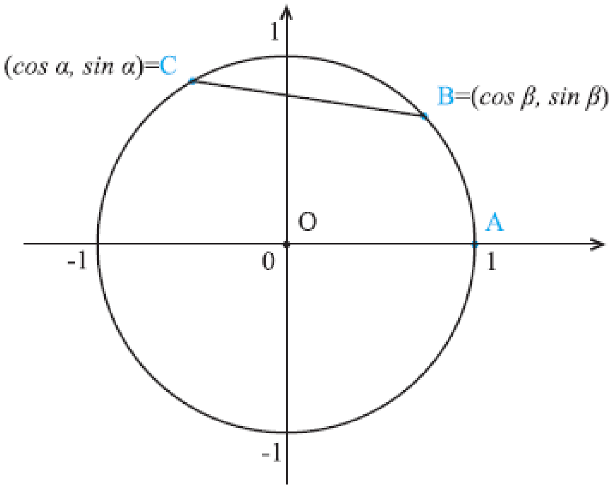
Адиционе формуле



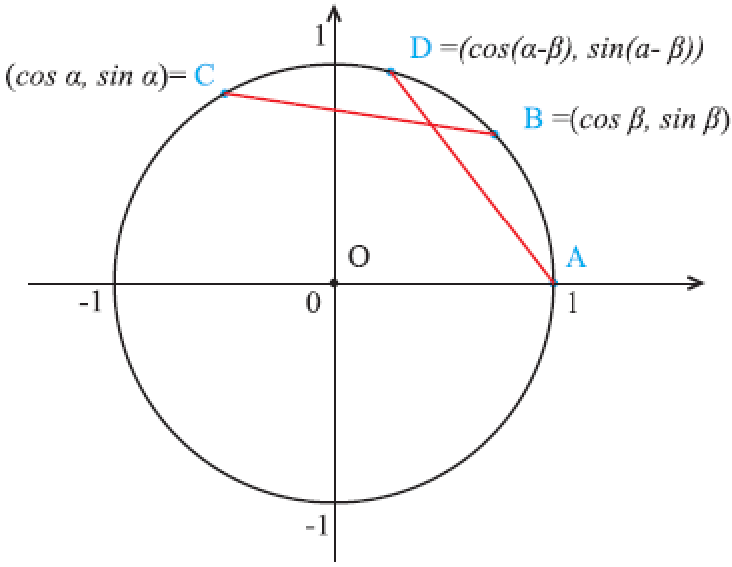
Посматрајмо лукове:

$\widehat{AB} = \beta \qquad \beta \in (0, 2\pi)$

$\widehat{AC} = \alpha \qquad \alpha \in (0, 2\pi)$

$\widehat{BC} = \alpha - \beta \qquad \alpha > \beta$

Уочимо сада тачку D такву да је дужина лука $AD = \alpha - \beta$:



Лукови BC и AD су једнаке дужине.

Дужина дужи BC је

$$|BC| = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$
$$|BC| = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta}$$
$$|BC| = \sqrt{2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}$$

Дужина дужи AD je

$$|AD| = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta) - 0)^2}$$
$$|AD| = \sqrt{\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)}$$
$$|AD| = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha-\beta)}$$

$$|BC| = |AD|$$
$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta,$$

добијамо формулу

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Ако уместо β узмемо $-\beta$ добијамо $\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, односно

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Наведене формуле су адиционе формуле за косинус.

Адиционе формуле за синус добијамо помоћу адиционих формула за косинус:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$$

Ако уместо β узмемо $-\beta$ добијамо $\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$, односно

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cos\alpha\cos\beta\left(1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}$$, ако је

$\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$ закључујемо

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}}.$$

Ако уместо β узмемо $-\beta$ добијамо $tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}$, односно

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}}$$

Предложити ученицима да на сличан начин изведу адиционе формуле за котангенс:

$$\boxed{ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}}$$

$$\boxed{ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}}$$

под условима када су ти изрази дефинисани.

1) Naći bez upotrebe računskih pomagala vrednost trigonometrijskih funkcija uglova od
a) 15^0 b) 75^0 i v) 105^0

$$\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o)$$
$$= \sin 45^o \cdot \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\cos 15^o = \cos(45^o - 30^o)$$
$$= \cos 45^o \cos 30^o + \sin 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$tg 15^o = tg(45^o - 30^o) = \frac{tg 45^o - tg 30^o}{1 + tg 45^o tg 30^o}$$
$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

= racionališemo sa $\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9-3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

$$ctg 15^o = \frac{1}{tg 15^o} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$$

b)

$$\sin 75^o = \sin(45^o + 30^o)$$
$$= \sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o)$$
$$= \cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$tg 75^o = \frac{\sin 75^o}{\cos 75^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}}{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \text{(moramo opet racionalizaciju)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$ctg 75^o = \frac{1}{tg 75^o} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

v) $\sin 105^o = \sin(90^o + 15^o) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) =$ (imamo formulu) $= \cos 15^o =$

(a ovo smo već našli) $= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Naravno, isto bismo dobili i preko formule $\sin 105^o = \sin\left(60^o + 45^o\right)$

$$\cos 105^o = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -\sin 15^o = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$
$$tg 105^o = tg\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -ctg 15^o = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$
$$ctg 105^o = ctg\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -tg 15^o = -(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

opet ponavljamo da može i ideja da je $tg 105^0 = tg(60^o + 45^o)$.

Тригонометријске формуле двоструког угла

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ ако узмемо да је $\beta=\alpha$ биће $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ако узмемо да је $\beta=\alpha$ биће $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ ако узмемо да је $\beta=\alpha$ биће $\boxed{tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$, $tg\alpha\neq\pm1$, $\cos\alpha\neq 0$

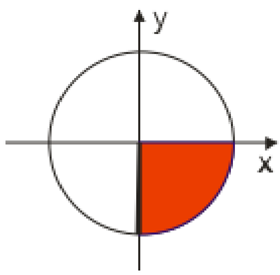
$ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$, ако узмемо да је $\beta=\alpha$ биће $\boxed{ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}}$, $ctg\alpha\neq 0$, $\sin\alpha\neq 0$

1.) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ **Nadji vrednosti za dvostruke uglove ako je α u IV kvadrantu.**

Najpre ćemo izračunati $\sin\alpha$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}$$
$$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$$
$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$



$\sin\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$, pošto je ugao iz IV kvadranta uzećemo da je $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$

Sada je:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}$$
$$= -\frac{24}{25}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$
$$tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

Zadaci za vežbu:

Vene 2: 1442 – 1462

1463 -1480

Stojanović 348 – 399

400 - 435